Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

Массалітіна Є.В., Кільчинський О.О.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика»

Київ – 2008

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Методичні вказівки до вивчення теми

дисципліни «Вища математика»

для студентів енергетичних спеціальностей

усіх форм навчання

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2008

Теорія функцій комплексної змінної: Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад.: Є.В. Массалітіна, О.О. Кільчинський. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 54 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 10 від 19.06. 2008 р.)

Навчальне видання

Теорія функцій комплексної змінної

Методичні вказівки

до вивчення дисципліни «Вища математика»

для студентів енергетичних спеціальностей

усіх форм навчання

Укладачі:

Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук,

Кільчинський Олександр Олександрович. канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний

редактор: *А. М. Самойленко,* д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент: *З. П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

За редакцією укладачів

ВСТУП

В методичних вказівках викладено основні теоретичні положення і методи теорії функцій комплексної змінної, які знаходять важливі застосування при розв'язуванні прикладних задач теорії автоматичного керування, електротехніки, радіотехніки, теоретичної механіки. Для більш глибокого розуміння матеріалу теоретичні положення ілюструються розв'язанням типових задач. Робота буде корисною студентам для глибшого розуміння їх фахових дисциплін і при самостійному вивченні курсу теорії функцій комплексної змінної.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НА ПРИКЛАДАХ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА (КЧ)

1.1. Комплексні числа в алгебраїчній формі

Означення. Комплексним числом z в алгебраїчній формі називається вираз вигляду

$$z = x + yi, \tag{1.1}$$

де x, y – дійсні числа, i – уявна одиниця, що має властивість

$$i^2 = -1 \quad (\sqrt{-1} = \pm i). \tag{1.2}$$

Складові x, y називають дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначають символами $x = \operatorname{Re} z,\quad y = \operatorname{Im} z$.

За означенням („$\overset{df}{=}$”) покладають $x + 0i \overset{df}{=} x;\quad 0 + yi \overset{df}{=} yi;\quad 0 + 0i \overset{df}{=} 0.$

КЧ $\bar{z} = x - yi$ називають спряженим до КЧ $z = x + yi.$

Геометрична інтерпретація, модуль та аргумент комплексного числа

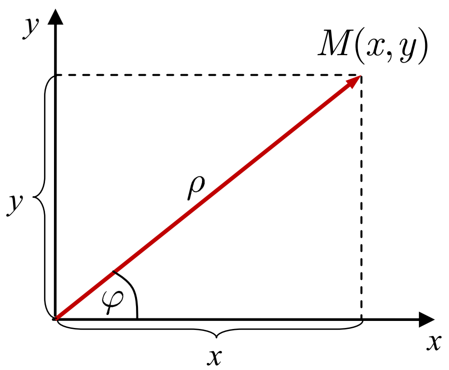

Рис. 1.1

Комплексні числа можна зображувати на спеціальній площині, яка в цьому випадку називається комплексною площиною. Комплексне число $z = x + yi$ зображується на площині Oxy точкою $M(x; y)$ або радіусом–вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.1.1). Довжина цього вектора позначається символом $|z|$ і називається модулем КЧ z, кут між цим вектором і додатною піввіссю Ox позначається через $Arg\,z$ і називається аргументом КЧ z. Значення $Arg\,z$ в межах інтервалу $(-\pi;\pi]$ позначається через $\arg z$ і називається головним. Модуль і аргумент знаходяться за формулами:

$$\begin{gathered} |z| = |x + yi| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \arg z = \varphi, \quad Arg\,z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{gathered} \tag{1.3}$$

де $\rho, \varphi -$полярні координати точки $M(x;y)$, що зображує КЧ z:

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, \quad y \geq 0; \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & x < 0, \quad y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Комплексні числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$ зображується сумою та різницею радіус-векторів з кінцевими точками $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$. Величина $|z_1 - z_2|$ має геометричний зміст відстані між точками M_1 та M_2, що зображують числа z_1, z_2.

Операції з КЧ в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення здійснюються з КЧ як зі звичайними алгебраїчними виразами, тільки слід враховувати, що $i^2 = -1$.

1) (порівняння КЧ) КЧ $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$ вважаються

рівними $z_1 = z_2$ тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$;

2) (додавання КЧ)

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i;$$

3) (віднімання КЧ)

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i;$$

4) (множення КЧ)

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 =$$

$$= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i;$$

З означення добутку КЧ випливає

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

5) (ділення КЧ)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

На множину комплексних чисел розповсюджуються всі відомі властивості арифметичних операцій з дійсними числами; залишаються, у силі і всі формули скороченого множення.

1.2. Комплексні числа в тригонометричній та показниковій формах

Означення. Тригонометричною та показниковою формами комплексного числа $z = x + yi$ називають відповідно вирази вигляду

$$z = \rho(\cos\Phi + i\sin\Phi), \qquad z = \rho\,\mathrm{e}^{\Phi i}, \tag{1.5}$$

де $\rho = |z|, \qquad \Phi = Arg\, z = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$

а значення параметрів ρ, φ визначаються за формулами (1.4).

Взаємозв’язок між тригонометричною та показниковою формами

(1.5) базується на формулі Ейлера

$$e^{\Phi i} = \cos\Phi + i\sin\Phi, \qquad (1.6)$$

де функція $e^{\Phi i}$ має алгебраїчні властивості звичайної показникової функції (як у випадку, коли б число i було дійсним).

Операції з КЧ в тригонометричній та показниковій формах

Нехай
$$z_1 = \rho_1 e^{\Phi_1 i} = \rho_1(\cos\Phi_1 + i\sin\Phi_1),$$
$$z_2 = \rho_2 e^{\Phi_2 i} = \rho_2(\cos\Phi_2 + i\sin\Phi_2).$$

Тоді операції з цими числами здійснюються за правилами:

1) (порівняння КЧ) КЧ z_1, z_2 вважаються рівними $z_1 = z_2$ тоді і лише тоді, коли мають місце рівності:
$$\rho_1 = \rho_2, \quad \Phi_1 = \Phi_2 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

2) (множення КЧ) $z_1 z_2 = \rho_1 e^{\Phi_1 i} \rho_2 e^{\Phi_2 i} = \rho_1\rho_2 e^{(\Phi_1+\Phi_2)i} =$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\Phi_1+\Phi_2) + i\sin(\Phi_1+\Phi_2)];$$

3) (ділення КЧ) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1 e^{\Phi_1 i}}{\rho_2 e^{\Phi_2 i}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\Phi_1-\Phi_2)i} =$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\Phi_1-\Phi_2) + i\sin(\Phi_1-\Phi_2)];$$

4) (піднесення КЧ до степеня) степені КЧ
$$z = \rho e^{\Phi i} = \rho(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$
знаходяться за формулою Муавра
$$z^n = (\rho e^{\Phi i})^n = \rho^n e^{n\Phi i} = \rho^n(\cos n\Phi + i\sin n\Phi), \quad (n = 0, \pm 1, \ldots); \qquad (1.7)$$

5) (видобування кореня з КЧ) КЧ w називається коренем *n*-го степеня з КЧ z і пишуть $w = \sqrt[n]{z}$ тоді і лише тоді, коли $w^n = z$;

існує рівно *n* різних значень $\sqrt[n]{z}$, які при $z=\rho\,\mathrm{e}^{\Phi i}=$ $=\rho(\cos\Phi+i\sin\Phi)\neq 0$ знаходяться за формулою:

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho\,\mathrm{e}^{\Phi i}}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\Phi}{n}i}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}=$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad (k=\overline{0;n-1}),\qquad (1.8)$$

де через $\sqrt[n]{\rho}$ позначено арифметичне значення кореня n-го степеня з дійсного числа ρ.

1.3. Методика розв’язування завдання №1

Завдання 1. Представити число $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах. Зобразити числа z, $z_1=1+3i$, $z_2=2+i$ на комплексній площині. Обчислити $\sqrt[4]{z}$.

Розв’язання. **1.** Для приведення числа z до алгебраїчної форми у виразі $z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+3i}{2+i}$ поділимо чисельник на знаменник. Матимемо:

$$z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{1+3i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=$$
$$=\frac{2-i+6i+3}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i.$$

Отже, $z=1+i$ – алгебраїчна форма КЧ $z=\dfrac{1+3i}{2+i}$.

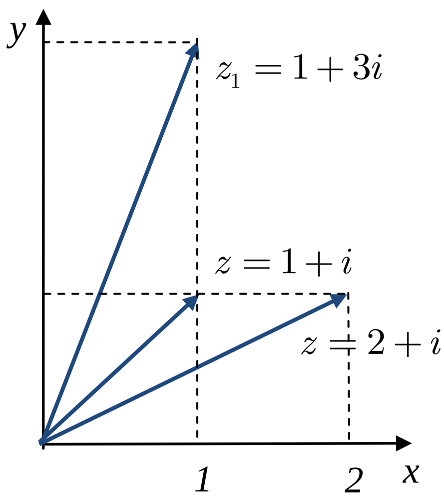

Рис. 1.2

Для приведення числа z до тригонометричної та показникової форм, скористаємося формулами (1.3) – (1.4).

При $x = \operatorname{Re} z = 1,\; y = \operatorname{Im} z = 1$знайдемо:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\ .$$

У відповідності із співвідношеннями (1.5) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$ – комплексна форма КЧ z, $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}$ – показникова форма КЧ z.

2. Зобразимо комплексні числа $z = 1 + i$, $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 + i$ на комплексній площині (рис. 1.2).

3. Обчислимо значення кореня $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1+i}$. Скористаємося формулою (1.8) при $n = 4,\; \rho = \sqrt{2},\; \varphi = \frac{\pi}{4},\; k = 0,1,2,3$:

$$w_k = \sqrt[4]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\varphi + 2k\pi}{4}i} = \sqrt[4]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right).$$

Отже, рівняння має чотири корені:

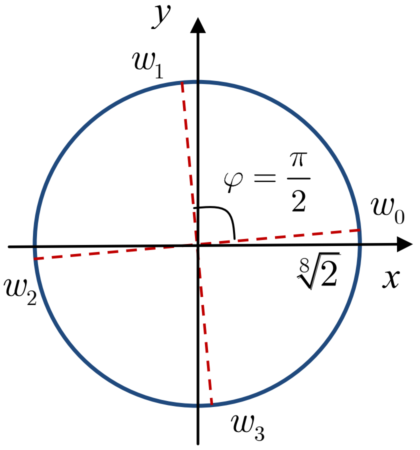

Рис. 1.3

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right) \approx 1.07 + i\,0.213;$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{16} + i\cos\frac{\pi}{16}\right) \approx -0.213 + i\,1.07;$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right) \approx -1.07 - i\,0.213;$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\sin\frac{\pi}{16} - i\cos\frac{\pi}{16}\right) \approx 0.213 - i\,1.07.$$

Зобразимо корені рівняння $w = \sqrt[4]{1+i}$ на комплексній площині (рис. 1.3).

Відповідь: $z = 1+i, \quad z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}, \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right);$

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right), \qquad w_1 = \sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\right), \qquad w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\sin\frac{\pi}{16} - i\cos\frac{\pi}{16}\right).$$

2. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ (ФКЗ)

2.1. Способи задавання ФКЗ, елементарні ФКЗ

Нехай змінні КЧ $z = x + y\,i$ та $w = u + v\,i$ приймають значення з множин $D = \{z\}$, $E = \{w\}$.

Означення. ФКЗ $w = f(z)$ з областю визначення *D* і множиною значень *E* називається така залежність між змінними z та w, при якій кожному КЧ $z = x + y\,i \in D$ за певним правилом f поставлено у відповідність єдине КЧ $w = u + v\,i \in E$ і зворотно: для кожного КЧ $w \in E \;\Rightarrow\; \exists\, z \in D$, що $w = f(z)$.

Змінна z називається незалежною змінною або аргументом, змінна w – залежною змінною або функцією. Іноді залежну змінну w і правило f, за яким вона знаходиться позначають спільною літерою і функціональну залежність позначають символом $w = w(z)$.

Зауваження 2.1. Іноді крім звичайних (однозначних) ФКЗ, доводиться розглядати також багатозначні, тобто такі, коли кожному КЧ $z \in D$ ставиться у відповідність не одне, а декілька можливих значень КЧ w.

Способи задавання ФКЗ

Зазначимо два характерних способи задавання ФКЗ, що встановлюють їх зв'язок із звичайними функціями дійсних змінних: задавання дійсною та уявною частинами, задавання сумою функціонального ряду.

1-й спосіб. Задамо дійсні функції $u = u(x;y)$ та $v = v(x;y)$ від аргументів x, y. Покладемо

$$u(x;y) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + y\,i),$$

$$v(x;y) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + y\,i)$$

і складемо ФКЗ $f(z)$ за формулою:

$$w = f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y).$$

2-й спосіб. Задамо комплекснозначний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots . \qquad (2.1)$$

ФКЗ $f(z)$ задамо як суму цього ряду згідно з наступним означенням.

Означення. Область D називається областю збіжності ряду (2.1), а ФКЗ $f(z)$ – його сумою в цій області, якщо для кожного КЧ $z \in D$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} | S_n(z) - f(z) | = 0,$$

де через $S_n(z)$ позначено частинну суму ряду (2.1):

$$S_n(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n.$$

Область визначення ФКЗ $f(z)$ в даному разі збігається з областю D збіжності ряду (2.1). Стосовно збіжності ряду (2.1) відомо наступне. Існує круг радіуса R (круг збіжності) із центром у точці $z = z_0$, який має властивості: у внутрішніх точках цього круга, в області $|z - z_0| < R$, цей ряд збігається;

1) за межами круга, тобто в області $|z - z_0| > R$, ряд розбігається;
2) в точках кола $C_R : |z - z_0| = R$ в залежності від значень змінної z ряд може як збігатись, так і розбігатись.

Радіус збіжності ряду можна визначити за будь-якою з формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}, \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Елементарні ФКЗ

Кожна елементарна ФКЗ $f(z)$ є, так званим, аналітичним продовженням певної дійсної елементарної функції $f(x)$ з області дійсних аргументів x в область комплексних аргументів z.

До основних елементарних ФКЗ відносяться:

1) (ціла раціональна функція або поліном m-го степеня)

$$P_m(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m \quad (p_m \neq 0,\ m \in N);$$

2) (дробово-раціональна функція або раціональний дріб)

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \cdots q_n z^n};$$

3) (експоненціальна функція)

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \tag{2.2}$$

4) (тригонометричні функції)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.3}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

5) (гіперболічні функції)

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Зазначені ряди збігаються на всій комплексній площині.

Експоненціальна функція є періодичною з періодом $T = 2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^{z}$.

Мають місце формули Ейлера:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{2.6}$$

Між тригонометричними та гіперболічними функціями існує зв'язок:

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{sh}(iz) = i \sin z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z.$$

6) (логарифмічна функція) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z =$

$$= \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \tag{2.7}$$

7) (обернені тригонометричні функції)

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{iz+1}{iz-1}.$$

8) (обернені гіперболічні функції)

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1});$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1});$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z};$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

9) (загальна степенева функція) $w = z^a$,

($z = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число) визначається рівністю

$$z^a = \mathrm{e}^{a\operatorname{Ln} z}. \tag{2.8}$$

10) (загальна показникова функція) $w = a^z$,

($a \neq 0$ – будь-яке комплексне число) визначається рівністю

$$a^z = \mathrm{e}^{z\operatorname{Ln} a}. \tag{2.9}$$

2.2. Границя та неперервність ФКЗ

Околом точки z_0 називається множина всіх точок z комплексної площини, що містяться в межах деякого круга радіуса $R > 0$ з центром у точці z_0, тобто задовольняють нерівності: $|z - z_0| < R$.

Нехай однозначна ФКЗ визначена в деякому околі точки z_0 крім можливо самої точки z_0.

Означення. Комплексне число A називається границею ФКЗ $w=f(z)$ при наближенні z до z_0 і пишуть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ (або $f(z)\to A$ при $|z-z_0|\to 0$), якщо:

1) ФКЗ є визначеною в околі точки z_0 крім, можливо, самої точки z_0;
2) $|f(z)-A|\to 0$ при $|z-z_0|\to 0$.

Теорема 2.1. Існування границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(z)=A$, де

$$f(z)=u(x;y)+i\,v(x;y), \qquad z_0=x_0+i\,y_0, \qquad A=\alpha+i\beta$$

є рівнозначним до існування границь

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y)=\alpha \quad \text{та} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y)=\beta .$$

Означення. ФКЗ $w=f(z)$ називається неперервною в точці z_0, якщо:

1) ця ФКЗ є визначеною в околі точки z_0;
2) $\exists$ (існує) границя: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

2.3. Похідна, первісна та невизначений інтеграл від ФКЗ

Означення. ФКЗ $f(z)$ називається диференційовною в точці z_0, а вираз $f'(z_0)$ чи $\dfrac{df(z_0)}{dz}$ її похідною в цій точці, якщо

$$\exists \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)=\frac{df(z_0)}{dz}.$$

Теорема 2.2. Якщо ФКЗ $f(z)$ є диференційовною в точці z_0, то вона є й неперервною в цій точці.

Теорема 2.3. Для того, щоб ФКЗ $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ мала похідну у точці $z=x+i\,y$, необхідно й достатньо, щоб функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$

були диференційовними в точці (x,y) та задовольняли умовам Коші – Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Похідну диференційованої ФКЗ можна подати у вигляді

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.11}$$

Означення. ФКЗ $F(z)$ називається первісною до функції $f(z)$ в однозв'язній області D, якщо у кожній точці z цієї області $\exists\ F'(z) = f(z)$.

Означення. Сукупність всіх первісних до функції $f(z)$ в області D називається невизначеним інтегралом від функції $f(z)$ в області *D.* Має місце формула:

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C,$$

де $\int f(z)dz$ – невизначений інтеграл до функції $f(z)$ в області *D*, $F(z)$ – одна з первісних до функції $f(z)$ в області D, а $C - const$.

Зауваження 2.2. Означення границі, похідної та первісної у випадку ФКЗ залишаються інваріантними, тобто незмінними за формою порівняно з відповідними означеннями для функцій дійсної змінної. Тому при операціях з ФКЗ зберігаються в силі відомі правила диференціювання та інтегрування, таблиця похідних та інтегралів.

2.4. Аналітичні ФКЗ

Означення. ФКЗ $f(z)$ називається аналітичною в точці z_0, якщо вона є диференційовною як у самій точці z_0, так і в деякому її околі.

Означення. ФКЗ $f(z)$ називається аналітичною в області D, якщо вона є аналітичною у кожній точці цієї області. ФКЗ $f(z)$ називається аналітичною в замкненій області $\overline{D}$, якщо вона є аналітичною в області D та на її межі.

Про зв'язок між аналітичними та гармонійними функціями, відновлення аналітичної ФКЗ

Означення. Дійсна функція $\varphi(x,y)$ називається гармонійною в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно та задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{2.12}$$

Гармонійні в області D функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$, що задовольняють умовам Коші – Рімана (2.12), називаються спряженими гармонійними функціями.

Теорема 2.4. Для того, щоб ФКЗ $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ була аналітичною в області D, необхідно й достатньо, щоб її дійсна $u(x,y)$ та уявна $v(x,y)$ частини були у цій області спряженими гармонійними функціями.

Геометричний зміст модуля та аргументу похідної

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в точці z_0 і $f'(z_0)\neq 0$. Тоді модуль похідної $|\,f'(z_0)\,|$ дорівнює коефіцієнту розтягу k в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$ площини z на площину w. При $k = | f'(z_0) | > 1$, має місце розтяг, при $k = | f'(z_0) | < 1$– стиск.

Аргумент похідної $\arg f'(z_0)$ дорівнює куту φ, на який треба повернути дотичну до кривої на площині z в точці z_0, щоб при відображенні $w = f(z)$ отримати дотичну до образа цієї кривої на площині w у точці $w_0 = f(z_0)$. Зауважимо, що якщо $\varphi = \arg f'(z) > 0$, то поворот здійснюється проти годинникової стрілки, а при $\varphi < 0$ – за годинникової стрілкою.

2.5. Методика розв'язування завдання №2

Завдання 2.1. Подати в алгебраїчній формі:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2i\right)$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$; в) $\operatorname{Arth}\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)$.

Розв'язання. **а)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2i\right) = \Big| \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \Big| =$

$$= \cos\frac{\pi}{2}\cos 2i - \sin\frac{\pi}{2}\sin 2i = \Big| \sin(iz) = i \operatorname{sh} z \Big| = -i \operatorname{sh} 2.$$

б) Згідно з формулою (2.9) $a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} a}$ $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{i} = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\mathrm{e}^{i \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}.$$

Обчислимо окремо вираз $i \operatorname{Ln}\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$. За формулою (2.7)

$$\operatorname{Ln} z = \ln| z | + i\,(\arg z + 2k\pi).$$

Оскільки $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $x = \operatorname{Re} z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2}$, за формулою (1.4)

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1, \quad \arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Отже, $$\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right).$$

$$i\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=i^2\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=-\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right).$$

Остаточно $$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\mathrm{e}^{i\operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{6}+2k\right)\pi}.$$

в) Оскільки рівність $w=\operatorname{Arth} z$ рівносильна рівності $z=\operatorname{th} w$, то можемо записати

$$z=\operatorname{th} w \quad\Rightarrow\quad z=\frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w}=\frac{\mathrm{e}^{w}-\mathrm{e}^{-w}}{\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{-w}} \quad\Rightarrow\quad z(\mathrm{e}^{w}+\mathrm{e}^{-w})=\mathrm{e}^{w}-\mathrm{e}^{-w} \quad\Rightarrow$$

$$\frac{z(\mathrm{e}^{2w}+1)}{\mathrm{e}^{w}}=\frac{(\mathrm{e}^{2w}-1)}{\mathrm{e}^{w}} \quad\Rightarrow\quad z\,\mathrm{e}^{2w}+z=\mathrm{e}^{2w}-1 \quad\Rightarrow \mathrm{e}^{2w}(1-z)=z+1 \quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{e}^{2w}(1-z)=z+1 \quad\Rightarrow \mathrm{e}^{2w}=\frac{z+1}{1-z} \quad\Rightarrow$$

$$w=\operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

Згідно з умовою задачі $z=\dfrac{4-3i}{5}$, отже,

$$w=\operatorname{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{\frac{4-3i}{5}+1}{1-\frac{4-3i}{5}}=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{9-3i}{1+3i}=\left|\, z_1=\frac{9-3i}{1+3i}\,\right|=\frac{1}{2}\operatorname{Ln} z_1.$$

Знайдемо алгебраїчну форму КЧ z_1

$$z_1=\frac{9-3i}{1+3i}=\frac{9-3i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{9-27i-3i-9}{10}=-3i.$$

Отже, $x_1=\operatorname{Re} z_1=0,\quad y_1=\operatorname{Im} z_1=-3$. За формулою (1.4)

$$|z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=3, \quad \arg z_1=-\frac{\pi}{2}.$$

За формулою (2.7) $\operatorname{Ln} z_1 = \ln|z_1| + i(\arg z_1 + 2k\pi) = \ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

Отже, $$w = \operatorname{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} z_1 = \frac{1}{2}\ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

Відповідь: а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2i\right) = -i\,\mathrm{sh}\,2$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{6}+2k\right)\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

в) $\operatorname{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right) = \ln\sqrt{3} + i\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $\quad k \in Z$.

Завдання 2.2. З'ясувати, чи є аналітичною функція $w = \mathrm{e}^{z}$. У випадку аналітичності цієї функції знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні за допомогою функції $w = f(z)$ в точці $z_0 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. 1. Оскільки $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, знайдемо дійсну $u(x,y)$ та уявну $v(x,y)$ частини функції $w = f(z)$.

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{iy} = \left|\ \mathrm{e}^{iy} \overset{(1.6)}{=} \cos y + i\sin y\ \right| = \mathrm{e}^{x}\cos y + i\,\mathrm{e}^{x}\sin y.$$

$$u(x,y) = \operatorname{Re} w = \mathrm{e}^{x}\cos y,$$

$$v(x,y) = \operatorname{Im} w = \mathrm{e}^{x}\sin y.$$

2. Покажемо, що функція $w = f(z) = \mathrm{e}^{z}$ аналітична. Перевіримо виконання умов Коші–Рімана (2.10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mathrm{e}^{x}\cos y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \mathrm{e}^{x}\cos y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\mathrm{e}^{x}\sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \mathrm{e}^{x}\sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умови Коші – Рімана виконуються в будь-якої точці комплексної площини, отже функція $w = f(z) = \mathrm{e}^z$ є аналітичною функцією на всій комплексній площині.

Похідну ФКЗ $f(z) = \mathrm{e}^z$ знайдемо за формулою (2.11)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y) \overset{(1.6)}{=} \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^z .$$

3. Знайдемо коефіцієнт розтягу $k = |\, f'(z_0)\,|$ та кут повороту $\varphi = \arg f'(z_0)$ при відображенні за допомогою функції $f(z) = \mathrm{e}^z$ в точці $z_0 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

Обчислимо окремо значення похідної в точці z_0:

$$f'(z_0) = \mathrm{e}^{z_0} = \mathrm{e}^{\ln 2 + i\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\ln 2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \overset{(1.6)}{=} 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} .$$

Отже, коефіцієнт розтягу $k = |\, f'(z_0)\,| = |\,\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,| \overset{(1.4)}{=} \sqrt{2+2} = 2$.

Кут повороту при відображенні $w = \mathrm{e}^z$ в точці z_0:

$$\varphi = \arg f'(z_0) \overset{(1.4)}{=} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $k = |\, f'(z_0)\,| = 2$, $\varphi = \arg f'(z_0) = \frac{\pi}{4}$.

Завдання 2.3. Відновити аналітичну функцію $w = f(z)$ в околі точки $z_0 = 0$ за відомою уявною частиною $v(x, y) = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$ і значенням $f(z_0) = f(0) = i$. Знайти w'.

Розв'язання. 1– спосіб. 1. Перевіримо, що виконуються умови теореми 2.4 і задана функція $v(x, y)$ є гармонійною.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 2(\operatorname{sh} x \sin y - y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2(\operatorname{ch} x \cos y - x) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2\cdot\frac{\partial}{\partial x}\ \ \operatorname{sh}x\sin y - y\ \ = 2\operatorname{ch}x\sin y,\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 2\cdot\frac{\partial}{\partial y}\ \ \operatorname{ch}x\cos y - x\ \ = -2\operatorname{ch}x\sin y\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\operatorname{ch}x\sin y - 2\operatorname{ch}x\sin y = 0\,.$$

Функція $v(x,y)$ є гармонійною, оскільки задовольняє рівнянню Лапласа (2.12). Отже, існує аналітична функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

2. На підставі умов Коші – Рімана доберемо функцію $u(x,y)$, як спряжену до гармонійної функції $v(x,y)$. За формулами (2.10) матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2(\operatorname{ch}x\cos y - x), \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2(\operatorname{sh}x\sin y - y). \qquad (2.14)$$

Інтегруючи рівність (2.13) по змінній x, знайдемо:

$$u(x,y) = 2\cdot\int(\operatorname{ch}x\cos y - x)\,dx = 2\operatorname{sh}x\cos y - x^2 + \varphi(y) \quad\Rightarrow$$

$$u(x,y) = 2\operatorname{sh}x\cos y - x^2 + \varphi(y), \qquad (2.15)$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від змінної y.

Після диференціювання по змінній y із рівності (2.15) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2\operatorname{sh}x\sin y + \varphi'(y)\,. \qquad (2.16)$$

Із порівняння виразів $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ за формулами (2.14), (2.16) матимемо

$$\cancel{-2\operatorname{sh}x\sin y} + 2y = \cancel{-2\operatorname{sh}x\sin y} + \varphi'(y) \quad\Rightarrow\quad \varphi'(y) = 2y \quad\Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int\varphi'(y)\,dy = \int 2y\,dy = y^2 + C\,.$$

По підставленні знайденого значення $\varphi(y)$ у формулу (2.15) остаточно одержимо

$$u(x,y) = 2\operatorname{sh} x\cos y - x^2 + y^2 + C.$$

3. Відновимо функцію $w = f(z)$.

$$f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y) = 2\operatorname{sh} x\cos y - x^2 + y^2 + C + i(2\operatorname{ch} x\sin y - 2xy) =$$

$$= -(x^2 + i2xy - y^2) + 2(\operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y) + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2, \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -z^2 + (e^x - e^{-x})\cos y + i(e^x + e^{-x})\sin y + C =$$

$$= -z^2 + (e^x\cos y + i\,e^x\sin y - e^{-x}\cos y + i\,e^{-x}\sin y) + C =$$

$$= -z^2 + e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y) + C =$$

$$= \left| \; e^{\pm iy} \overset{(1.6)}{=} \cos y \pm i\sin y \; \right| = -z^2 + e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy} + C =$$

$$= -z^2 + e^{x+iy} - e^{-x-iy} + C = -z^2 + 2\frac{e^z - e^{-z}}{2} + C = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + C.$$

Отже, відновлена ФКЗ $w = f(z)$ дається формулою:

$$w = f(z) = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + C.$$

4. Знайдемо константу C, використовуючи умову $f(z_0) = f(0) = i$.

$$f(0) = i = 2\operatorname{sh} 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = i.$$

Отже, остаточно

$$w = f(z) = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + i. \qquad (2.17)$$

2 – й спосіб. **1.** Оскільки було показано, що $w = f(z)$ – аналітична функція, за формулою (2.11) знайдемо її похідну:

$$w' = f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2(\operatorname{ch} x\cos y - x) + i2(\operatorname{sh} x\sin y - y) =$$

$$= -2(x+iy) + 2(\operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y) = -2z + (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) \cos y +$$

$$+ i(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) \sin y = -2z + \mathrm{e}^{x}(\cos y + i \sin y) + \mathrm{e}^{-x}(\cos y - i \sin y) =$$

$$= -2z + (\mathrm{e}^{x+iy} + \mathrm{e}^{-x-iy}) = -2z + 2\operatorname{ch} z.$$

$$w' = f'(z) = -2z + 2\operatorname{ch} z\,. \qquad (2.18)$$

2. Виходячи з інваріантності таблиці похідних та інтегралів, з виразу (2.18) формальним інтегруванням по змінній z знайдемо:

$$w = f(z) = \int f'(z)\,dz = \int (-2z + 2\operatorname{ch} z)dz = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + C\,.$$

3. Знайдемо константу C. Оскільки $f(0) = i \quad \Rightarrow \quad C = i$. Отже,

$$w = f(z) = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + i\,,$$

що збігається із знайденим раніше виразом (2.17).

Відповідь: $\qquad w = f(z) = -z^2 + 2\operatorname{sh} z + i\,.$

3. ІНТЕГРАЛ ВІД ФКЗ

3.1. Криволінійний інтеграл від ФКЗ

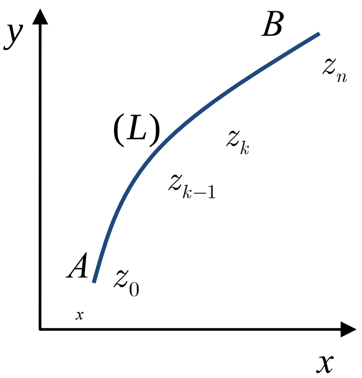

Рис. 3.1

Нехай на комплексній z – площині задано криву (L) з кінцевими точками A, B та ФКЗ $f(z)$, визначену на цій дузі.

Подрібнимо дугу (L) на n частинних дуг $(z_{k-1}; z_k)$, $k = \overline{1;n}$ (поєднавши точку z_0 з A, а точку z_n – з B), як показано на рисунку 3.1. На кожній з цих дуг довільним чином виберемо точку $\xi_k \in (z_{k-1}; z_k)$. Позначимо

$$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k\,, \;\; \lambda = \max_k |\,\Delta z_k\,|, \;\; k = \overline{1;n}\,.$$

Означення. Криволінійним інтегралом від ФКЗ $f(z)$ по кривій (L)

називається величина, яка позначається символом $\int\limits_{(L)} f(z)\,dz$ та вводиться за формулою

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz \overset{df}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k \tag{3.1}$$

при умові, що граничне значення існує (незалежно від способу подрібнення кривої (L) та вибору точок $\xi_k \in (z_{k-1}; z_k)$).

Якщо крива (L) є контуром (тобто замкненою кривою без точок самоперетину), який обходиться в додатному напрямку – так, що внутрішня область, обмежена цією кривою, залишається ліворуч, – то інтеграл позначається символом $\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz$ і називається контурним інтегралом.

Теорема 3.1. Достатньою ознакою існування інтеграла (3.1) є неперервність ФКЗ $f(z)$ на кривій (L).

Обчислення криволінійного інтеграла (3.1) можна звести до обчислення криволінійних інтегралів від дійсних функцій за формулою

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \int\limits_{(L)} u(x,y)\;dx - v(x,y)\;dy + i\int\limits_{(L)} v(x,y)\;dx + u(x,y)\;dy\,. \tag{3.2}$$

Криволінійний інтеграл від ФКЗ можна також обчислювати за формулою

$$\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))\cdot z'(t)\;dt\,, \tag{3.3}$$

де $z = z(t)$ параметричне рівняння кривої (L), t_1 і t_1 – значення параметра t в точках A та B кривої (L).

Властивості інтеграла від ФКЗ

1. $\int\limits_{(BA)} f(z)\,dz = -\int\limits_{(AB)} f(z)\,dz$.

При зміні напрямку обходу кривої інтеграл змінює знак на протилежний.

2. $\int\limits_{(L_1+L_2)} f(z)\,dz = \int\limits_{(L_1)} f(z)\,dz + \int\limits_{(L_2)} f(z)\,dz$.

3. $\int\limits_{(L)} \left[k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)\right] dz = k_1 \int\limits_{(L)} f_1(z)\,dz + k_2 \int\limits_{(L)} f_2(z)\,dz, \quad (k_1, k_2 = const)$.

4. $\left| \int\limits_{(L)} f(z)\,dz \right| \le \int\limits_{(L)} |f(z)|\,dz$.

Контурні інтеграли від аналітичних ФКЗ для однозв'язних та багатозв'язних областей

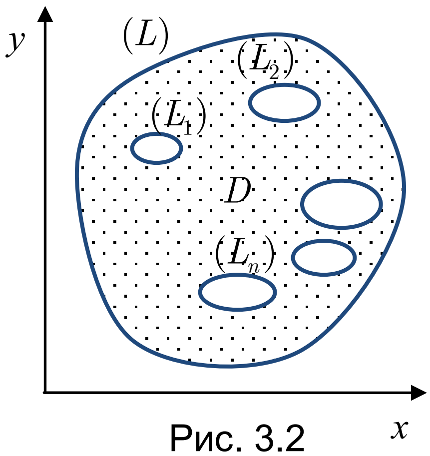

Рис. 3.2

Означення. Деяка область *D* комплексної площини називається однозв'язною, якщо вона обмежена тільки одним замкненим контуром. Область, яка не є однозв'язною, називається багатозв'язною.

Теорема 3.2. *(Інтегральна теорема Коші для однозв'язної області).* Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області *D*, то для кожного замкненого контура (L), що не виходить за межі цієї області, має місце рівність:

$$\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = 0. \tag{3.4}$$

Теорема 3.3. Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області *D*, то

1) в цій області вона має за первісну функцію

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz \qquad (\exists \Phi' f(z)=f(z)), \tag{3.5}$$

де через $\Phi(z)$ позначено інтеграл по довільній кривій, що з'єднує точки $z,\ z_0 \in D$ і не виходить за межі області *D*;

2) в цій області є справедливою формула Ньютона-Лейбніця:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1), \tag{3.6}$$

де $F(z)$ – одна з первісних функції $f(z)$.

Теорема 3.4. *(Інтегральна теорема Коші для багатозв'язної області).* Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в замкненій багатозв'язній області D, що обмежена зовнішнім контуром (L) та внутрішніми контурами $(L_1),\ldots,(L_n)$ (рис. 3.2), і жодні два з контурів не перетинаються, то має місце рівність

$$\oint_{(L)} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{(L_k)} f(z)\,dz\,. \tag{3.7}$$

Контурні інтеграли від ФКЗ з ізольованими особливими точками

Означення. Точка $z_0 \neq \infty$ називається ізольованою особливою точкою ФКЗ $f(z)$, якщо ця функція є диференційовною в деякому околі точки z_0 окрім самої точки z_0 (в цьому випадку $\exists f'(z)$ в деякому кільці $0 <| z - z_0 |< \rho$, але $\overline{\exists}$ („не існує") $f'(z_0)$).

Означення. Ізольована особлива точка z_0 називається усувною особливою точкою ФКЗ $f(z)$, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Означення. Ізольована особлива точка z_0 називається полюсом m -го порядку для ФКЗ $f(z)$, якщо в деякому околі точки z_0 цю функцію можна подати у вигляді

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (m \in N) \tag{3.8}$$

де $g(z)$ – аналітична ФКЗ в точці z_0.

Означення. Ізольована особлива точка z_0 називається суттєво особливою точкою ФКЗ $f(z)$, якщо граничного значення $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує (ні скінченого, ні нескінченного).

Зауваження 3.1. Поведінка ФКЗ $f(z)$ в точці $z_0 = \infty$ визначається поведінкою в точці $\xi_0 = 0$ ФКЗ $\varphi(\xi) = f(\xi^{-1})$.

Мають місце твердження:

1) ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в точці $z_0 = \infty$, якщо ФКЗ $\varphi(\xi)$ є аналітичною в точці $\xi_0 = 0$;
2) точка $z_0 = \infty$ є усувною особливою точкою, полюсом m-го порядку або суттєво особливою точкою в залежності від того, чи буде точка $\xi_0 = 0$ усувною особливою точкою, полюсом m-го порядку або суттєво особливою точкою для ФКЗ $\varphi(\xi)$.

Приклад 3.1. Точка $z = 2$ є усувною особливою точкою для ФКЗ $f(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 2}{z - 2}$, бо функція є диференційовною в околі точки $z = 2$ окрім самої цієї точки та існує скінченна границя

$$\lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 3z + 2}{z - 2} = \lim_{z \to 2} \frac{(z-1)\cancel{(z-2)}}{\cancel{z-2}} = \lim_{z \to 2} (z-1) = 1.$$

Приклад 3.2. ФКЗ $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+3)^2}$ є диференційовною в околі точок $z_1 = 1$ та $z_2 = -3$ окрім самих цих точок, отже обидві ці точки є ізольованими особливими.

Точка z_1 є полюсом 1-го порядку, бо функцію можна подати за формулою (3.8) у вигляді $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-1}$, де ФКЗ $g(z)=\dfrac{z}{(z+3)^2}$ є аналітичною в околі точки z_1.

Точка z_2 є полюсом 2-го порядку, бо функцію $f(z)$ можна подати також у вигляді $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z+3)^2}$, де ФКЗ $g(z)=\dfrac{z}{z-1}$, є аналітичною в околі точки z_2.

Приклад 3.3. Точка $z=0$ є суттєво особливою для ФКЗ $f(z)=\cos\dfrac{z+5}{z}$, бо функція є диференційовною в околі точки $z=0$ окрім самої цієї точки і $\lim\limits_{z\to 0}\cos\dfrac{z+5}{z}=\cos\infty=\nexists$.

Приклад 3.4. Точка $z=\infty$ є полюсом 1-го порядку для ФКЗ $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z-2}$, бо після заміни $z=\xi^{-1}$ ця функція перетворюється у ФКЗ $\varphi(\xi)=\dfrac{1-3\xi+2\xi^2}{(1-2\xi)\xi}$, яка має в точці $\xi=0$ полюс 1-го порядку.

Теорема 3.5. *(Про інтегральну формулу Коші).* Якщо ФКЗ $g(z)$ є аналітичною в замкненій області *D* з межевим контуром (L), то для кожної внутрішньої точки z_0 цієї області має місце інтегральна формула Коші:

$$\oint\limits_{(L)}\frac{g(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\,g(z_0). \tag{3.9}$$

Теорема 3.6. *(Про нескінченну диференційовність аналітичної ФКЗ).* Якщо ФКЗ $g(z)$ є аналітичною в замкненій області *D* з межевим контуром (L), то у кожній внутрішній точки $z_0\in D$ ця функція є нескінченно диференційовною і справджується рівність:

$$\oint_{(L)} \frac{g(z)\,dz}{(z-z_0)^{m+1}} = 2\pi i \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} \qquad m \in N. \tag{3.10}$$

Формули (3.9), (3.10) зручно застосовувати для обчислення контурних інтегралів від аналітичних ФКЗ з ізольованими особливими точками.

3.2. Методика розв'язування завдання №3

Завдання 3.1. Обчислити інтеграл $I = \int_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz$, якщо крива (L):

а) радіус–вектор точки $1+2i$; б) частина кола $|z|=1$, $(-\pi \le \arg z \le 0)$.

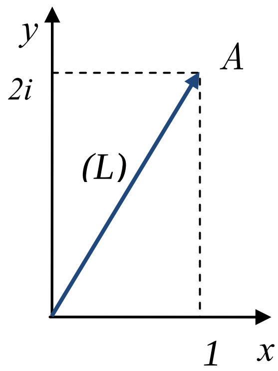

Рис. 3.3

Розв'язання. а) Радіус–вектор $\overrightarrow{OA}$ точки A міститься на прямій $y=2x$ (рис. 3.3). Запишемо параметричне рівняння відрізка OA:

$$(OA):\quad \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Оскільки $z = x+iy$, то комплексне параметричне рівняння (L) буде мати вигляд: $(L):\quad z = z(t) = t + 2ti = (1+2i)t, \quad 0 \le t \le 1.$

Тоді $$\int_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz \overset{(3.3)}{=} \left| \begin{array}{l} z^2 = (1+2i)^2 t^2 = (1+4i-4)t^2 = (-3+4i)t^2, \\ \operatorname{Im} z^2 = 4t^2, \quad dz = (1+2i)dt, \quad 0 \le t \le 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 (1+2i)t \cdot 4t^2 \cdot (1+2i)dt == 4(1+2i)^2 \int_0^1 t^3 dt = (-3+4i)\,t^4\Big|_0^1 = -3+4i.$$

б) Запишемо параметричне рівняння кола (L): $|z|=1$, $(-\pi \le \arg z \le 0)$ (рис. 3.4):

$$(L):\quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad -\pi \le t \le 0.$$

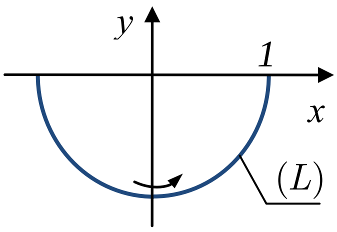

Рис. 3.4

Оскільки $z = x + iy$, то комплексне параметричне рівняння кривої (L) буде мати вигляд:

$$(L): z = z(t) = \cos t + i \sin t, \quad -\pi \le t \le 0.$$

Тоді

$$\int\limits_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz \overset{(3.3)}{=} \left| \begin{array}{l} dz = (-\sin t + i\cos t)\, dt \overset{(1.2)}{=} i(\cos t + i\sin t)\, dt \\ z^2 = (\cos t + i\sin t)^2 \overset{(1.12)}{=} \cos 2t + i\sin 2t, \ \ \operatorname{Im} z^2 = \sin 2t \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{0} (\cos t + i\sin t)\cdot \sin 2t \cdot i(\cos t + i\sin t)dt = i\int\limits_{-\pi}^{0} (\cos t + i\sin t)^2 \cdot \sin 2t dt =$$

$$= i\int\limits_{-\pi}^{0} (\cos 2t + i\sin 2t)\cdot \sin 2t dt = \frac{i}{2}\int\limits_{-\pi}^{0} \sin 4t dt - \int\limits_{-\pi}^{0} \sin^2 2t dt =$$

$$= -\frac{i}{8}\cos 4t\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{0}(1-\cos 4t)dt = -\frac{i}{8}(1-1) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: а) $I = -3 + 4i$; б) $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Завдання 3.2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{(L)} (z^3 - z)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z^2} dz$ де (L)– пряма, що з'єднує точки $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $f(z) = (z^3 - z)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z^2}$ – аналітична на всій комплексній площині, то значення інтеграла не залежить від форми кривої, яка з'єднує точки $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$. Використовуючи формулу (3.5) та формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$I = \int\limits_{1+i}^{2i} (z^3 - z)e^{\frac{1}{2}z^2} dz = \int\limits_{1+i}^{2i} (z^2 - 1)z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z^2} dz = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{1}{2}z^2, \ \ dt = zdz, \ \ z^2 = 2t \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline z & 1+i & 2i \\ \hline t & i & -2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_i^{-2} (2t-1)\mathrm{e}^t\, dt = \left| \begin{array}{l} u = 2t-1, \quad du = 2dt, \quad dv = \mathrm{e}^t\, dt, \\ v = \mathrm{e}^t, \quad \int_{z_1}^{z_2} udv = uv\, \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} vdu \end{array} \right| =$$

$$= (2t-1)\mathrm{e}^t\Big|_i^{-2} - 2\int_i^{-2} \mathrm{e}^t\, dt = (2t-1)\mathrm{e}^t\Big|_i^{-2} - 2\,\mathrm{e}^{\,t}\Big|_i^{-2} = -7\,\mathrm{e}^{-2} + (3-2i)\mathrm{e}^i .$$

Відповідь: $I = -7e^{-2} + (3-2i)\mathrm{e}^i$.

Завдання 3.3. Обчислити інтеграл $I = \oint\limits_{(L)} \dfrac{\operatorname{ch} 2z}{z^2(z^2+4)}dz$, де (L): $|\, z+i \,| = 2$.

Розв’язання. 1. Зробимо рисунок кривої L. $|\, z+i \,| = 2$ – коло радіуса $R = 2$ з центром в точці $z_0 = -i$.

2. Дослідимо особливі точки підінтегральної функції. Всередині контура L ФКЗ $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} 2z}{z^2(z^2+4)}$ має дві особливі точки: $z_1 = 0$ та $z_2 = -2i$ саме в цих точках функція є невизначеною, отже і недиференційованою, неаналітичною. Згідно з означенням точки z_1 та z_2 є полюсами відповідно другого та першого порядків. Побудуємо два кола

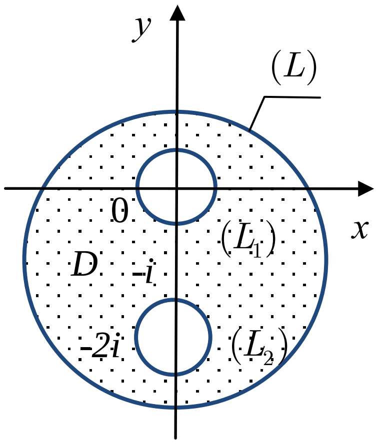

Рис. 3.5

$(L_1): \;|\, z \,| = \dfrac{1}{2}$ та $(L_2): \;|\, z+2i \,| = \dfrac{1}{2}$

з центрами в точках z_1 та z_2 і радіусом $r = \dfrac{1}{2}$.

3. Розглянемо багатозв’язну область D, що обмежена зовнішнім контуром L та внутрішніми контурами (L_1) та (L_2) (рис. 3.5). За теоремою Коші для багатозв’язної області (теорема 3.3)

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz = \oint\limits_{(L_1)} f(z)dz + \oint\limits_{(L_2)} f(z)dz . \qquad (3.11)$$

4. При інтегруванні по кривій (L_1) функцію $f(z)$ подамо у вигляді $f(z)=\dfrac{g_1(z)}{z^2}$, де $g_1(z)=\dfrac{\mathrm{ch}\,2z}{z^2+4}$ є аналітичною ФКЗ в області D_1 з межею (L_1). Застосовуючи теорему 3.5 при $z_0=z_1=0$, $m=2$, знайдемо

$$\oint\limits_{(L_1)} f(z)dz=\oint\limits_{(L_1)}\frac{g_1(z)\,dz}{z^2}dz=2\pi i\cdot g_1'\ \ z_1\ \ =2\pi i\cdot\left.\left(\frac{\mathrm{ch}\,2z}{z^2+4}\right)'\right|_{z=0}=$$

$$=2\pi i\left[\frac{2(z^2+4)\ \mathrm{sh}\,2z-2z\,\mathrm{ch}\,2z}{(z^2+4)^2}\right]_{z=0}=0\,.$$

При інтегруванні по кривій (L_2) функцію $f(z)$ подамо у вигляді $f(z)=\dfrac{g_2(z)}{z+2i}$, де $g_2(z)=\dfrac{\mathrm{ch}\,2z}{z^2(z-2i)}$ є аналітичною ФКЗ в області D_2 з межею (L_2). Застосовуючи теорему 3.4 при $z_0=z_2=-2i$, матимемо

$$\oint\limits_{(L_2)} f(z)dz=\oint\limits_{(L_2)}\frac{g_2(z)\,dz}{z+2i}dz=2\pi i\cdot g_2(z_2)=2\pi i\cdot\left.\left(\frac{\mathrm{ch}\,2z}{z^2(z-2i)}\right)\right|_{z=-2i}=$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\mathrm{ch}\,(-4i)}{(-2i)^2(-4i)}=\left|\ \mathrm{ch}(iz)=\cos z\ \right|=\frac{\pi}{8}\cos 4\,.$$

Кінцевий результат отримаємо за формулою (3.11):

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz=\oint\limits_{(L_1)} f(z)dz+\oint\limits_{(L_2)} f(z)dz=\frac{\pi}{8}\cos 4\,.$$

Відповідь: $I=\dfrac{\pi}{8}\cos 4\,.$

Завдання 3.4. Обчислити інтеграл $I=\oint\limits_{(L)}\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^4}dz$, де (L): **а)** $|\,z\,|=\dfrac{1}{2}$; **б)** $|\,z-1\,|=3$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^4}$ є аналітичною як у внутрішніх точках області, так і на її контурі (L): $|z|=\dfrac{1}{2}$ (рис. 3.4).

Тому за теоремою Коші для однозв'язної області (теорема 3.1) має місце рівність (3.4) та

$$\oint\limits_{(L)}\frac{\sin\pi z}{(z+1)^4}dz=0.$$

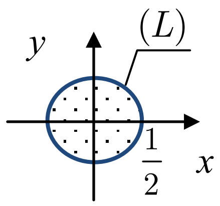

Рис. 3.4

б) Побудуємо контур (L) : $|z-1|=3$ – коло радіуса $R=3$ з центром у точці $z_0=1$ (рис. 3.5).

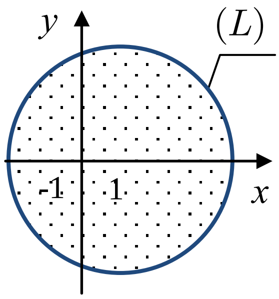

Рис. 3.5

Всередині контуру (L) ФКЗ $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^4}$ має тільки одну особливу точку $z=-1$ (полюс четвертого порядку).

Оскільки виконуються всі умови теореми 3.5, то за формулою (3.10) при $g(z)=\sin\pi z$, $z_0=-1$, $m=4$ знайдемо:

$$I=\oint\limits_{(L)}\frac{g(z)}{(z+1)^4}dz=2\pi i\cdot\frac{g^{(3)}(z_0)}{3!}=2\pi i\cdot(\sin\pi z)^{(3)}\Big|_{z=-1}=$$

$$=2\pi i\cdot(-\pi^3\cos\pi z)\Big|_{z=-1}=2\pi^4 i.$$

Відповідь: а) $I=0$; б) $I=2\pi^4 i$.

4. РОЗКЛАДАННЯ ФКЗ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ЛИШКИ

4.1. Розкладення ФКЗ у ряди Тейлора та Лорана

За певних умов ФКЗ $f(z)$ можна розкладати в ряд по степенях

$z - z_0$ стосовно фіксованої точки z_0.

Теорема 4.1. Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в крузі $D_R : |z - z_0| < R$, то в цьому крузі її можна розкласти в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

де $$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_\rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

(L_ρ) – будь-яке коло $|z - z_0| = \rho, \quad 0 < \rho < R.$

Теорема 4.2. Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в кільці $K_{r,R} : r < |z - z_0| < R$, то в цьому кільці її можна розкласти в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \tag{4.1}$$

де $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_\rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

(L_ρ) – будь-яке коло $|z - z_0| = \rho, \quad r < \rho < R.$

Зауваження 4.1. Ряд Лорана сприймається як сума двох рядів за формулою:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \stackrel{df}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

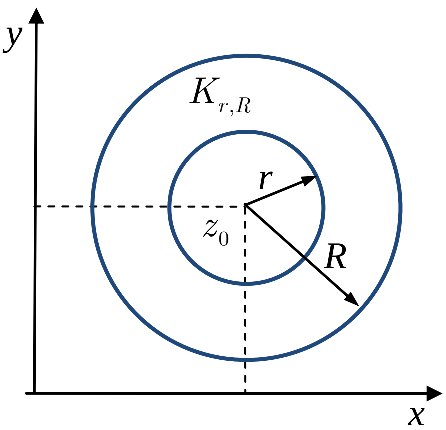

Рис. 4.1

де перший ряд (що містить тільки від'ємні степені $z - z_0$) називається головною, а другий (що містить інші степені) – правильною частиною ряду Лорана. Головна частина ряду Лорана збігається в області $|z - z_0| > r$, правильна – в крузі $D_R : |z - z_0| < R$, де r та R – відстані від точки z_0 до внутрішньої та зовнішньої межі кільця $K_{r,R}$ (ці межі проходять через особливі точки ФКЗ $f(z)$).

Зауваження 4.2. При розкладеннях у степеневі ряди зручно застосовувати вже наведені формули (2.2) – (2.9) та співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n, \qquad (|\,t\,|<1), \\ \frac{1}{1+t} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad (|\,t\,|<1). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2. Ряди Лорана в околі особливої точки

Означення. Рядом Лорана для ФКЗ $f(z)$ в околі ізольованої особливої точки z_0 називається розкладення цієї функції в ряд по степенях $z-z_0$ в деякому кільці $0<|z-z_0|<R$.

Для розпізнавання особливих точок ФКЗ застосовуються наступні теореми.

Теорема 4.3. Ізольована особлива точка z_0 є усувною особливою точкою ФКЗ $f(z)$ тоді і лише тоді, коли в околі цієї точки розкладення в ряд Лорана не містить головної частини, тобто має вигляд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ (при цьому головна частина розкладення зовсім відсутня, $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0 \neq \infty$).

Теорема 4.4. Ізольована особлива точка z_0 є полюсом m-го порядку для ФКЗ $f(z)$ тоді і лише тоді, коли в околі цієї точки розкладення в ряд Лорана має вигляд

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad (c_{-m}\neq 0)$$

(головна частина розкладення містить скінченну кількість доданків, при $k=\overline{0;m-1}$ маємо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=\infty$, але

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m=c_{-m}\neq\infty \text{).}$$

Теорема 4.5. Ізольована особлива точка z_0 є суттєво особливою точкою ФКЗ $f(z)$ тоді і лише тоді, коли в околі цієї точки головна частина розкладення в ряд Лорана містить нескінченну кількість доданків (з від'ємними степенями $z-z_0$).

4.3. Лишки та їх обчислення

Означення. Лишком ФКЗ $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z_0\neq\infty$ називається величина, що позначається символом $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ та вводиться за рівністю

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} f(z)\,dz, \tag{4.3}$$

де $(L_\rho)-$ будь-яке коло $|z-z_0|=\rho$ $(\rho>0)$, в середині якого нема інших особливих точок окрім точки z_0.

Означення. Лишок ФКЗ $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z=\infty$ вводиться за рівністю

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L_\rho)} f(z)\,dz,$$

де $(L_\rho)-$ будь-яке коло $|z-z_0|=\rho$ $(\rho>0)$, ззовні якого нема інших особливих точок окрім точки $z=\infty$.

Теорема 4.6. Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною всюди за виключенням скінченої кількості особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_k$ та $z=\infty$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{n=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Обчислення лишків за розкладеннями в степеневі ряди

Лишок у особливій точці $z_0 \neq \infty$ можна знаходити за формулою

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}, \tag{4.4}$$

де c_{-1} – коефіцієнт при степені $(z-z_0)^{-1}$ ряду Лорана для ФКЗ $f(z)$ в околі точки z_0.

Лишок у особливій точці $z=\infty$ можна знаходити за формулою

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1},$$

де c_{-1} – коефіцієнт при степені z^{-1} ряду Лорана для ФКЗ $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки.

Обчислення лишків за допомогою границь та похідних

I. При обчисленні лишка в ізольованій особливій точці $z_0 \neq \infty$ можна вживати такі формули:

1) (z_0 – усувна особлива точка)

$$\operatorname*{Re\,s}_{z=z_0} f(z) = 0; \tag{4.5}$$

2) (z_0 – полюс 1-го порядку)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) \tag{4.6}$$

або (у випадку, коли $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)},\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0,\ \varphi(z_0)\neq 0$)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \left.\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}\right|_{z=z_0}; \tag{4.7}$$

3) (z_0 – полюс m-го порядку)

$$\operatorname*{Res}_{\substack{z=z_0\\ m}} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[f(z)(z-z_0)^{\,m}\right]. \qquad (4.8)$$

II. При обчисленні лишка в ізольованій особливій точці $z=\infty$ можна (див. зауваження 3.1) ввести функцію $\varphi(\xi)=f(\xi^{-1})$ та скористатись формулами:

1) ($z=\infty$ – усувна особлива точка) $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \varphi'(\xi)\Big|_{\xi=0}$;

2) ($z=\infty$– полюс m-го порядку)

$$\operatorname*{Res}_{\substack{z=\infty\\ m}} f(z) = -\frac{1}{(m+1)!}\lim_{\xi\to 0}\frac{d^{m+1}}{d\xi^{m+1}}\left[\varphi(\xi)\,\xi^{\,m}\right].$$

4.4. Методика розв'язування завдання №4

Завдання 4.1. Знайти всі лорановські розклади за степенями z ФКЗ

$$f(z)=\frac{z+8}{z^3-5z^2+4z}.$$

Розв'язання. Оскільки функція $f(z)$ має три особливі точки (нулі знаменника, тобто точки $z=0$, $z=1$, $z=4$), то її розкладення слід шукати окремо в кожній з трьох областей

$$D_1=\{z:\quad 0<|z|<1\};$$

$$D_2=\{z:\quad 1<|z|<4\};$$

$$D_3=\{z:\quad 4<|z|<\infty\}.$$

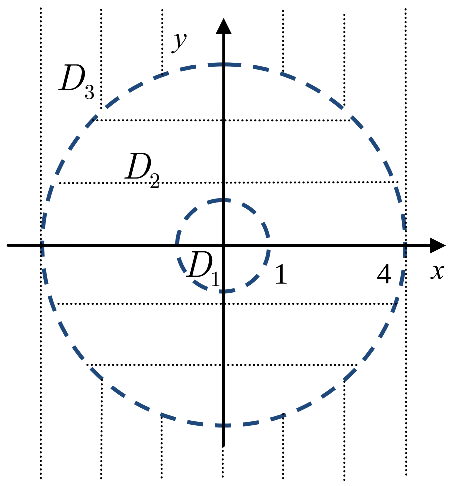

Рис. 4.2

За умовами завдання в кожній з цих областей розкладання матиме вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n . \qquad (4.9)$$

Однак у кожній з цих областей будуть різні значення коефіцієнтів c_n і, відповідно, різні області збіжності. Для спрощення подальшої роботи подамо ФКЗ $f(z)$ як суму елементарних дробів

$$f(z)=\frac{z+8}{z(z-1)(z-4)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-4}=$$

$$=\frac{A(z-1)(z-4)+Bz(z-4)+Cz(z-1)}{z(z-1)(z-4)}.$$

Невідомі A, B, C знайдемо за методом окремих значень з рівняння:

$$z+8=A(z-1)(z-4)+Bz(z-4)+Cz(z-1)$$

$$z=0: \quad 8=4A \quad \Rightarrow \quad A=2;$$

$$z=1: \quad 9=-3B \quad \Rightarrow \quad B=-3;$$

$$z=4: \quad 12=12C \quad \Rightarrow \quad C=1.$$

Надалі розкладення функції $f(z)$ шукатимемо як розкладання суми

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+f_3(z), \qquad (4.10)$$

де
$$f_1(z)=\frac{2}{z}, \quad f_2(z)=\frac{-3}{z-1}, \quad f_3(z)=\frac{1}{z-4}.$$

Перший доданок цієї суми при $\forall z\neq 0$ вже є одним з членів розкладення (4.9) (при $n=-1, c_n=c_{-1}=-2$) і ніяких перетворень не потребує. Другий і третій доданки цієї суми приводяться до потрібного вигляду розкладень по степенях z за формулами (4.2). Враховуючи особливості областей $D_i, \quad i=1,2,3$, розглянемо три випадки.

1-й випадок. Нехай $z\in D_1$. Зауважимо, що в околі заданої точки $z_1=0$ ряд Лорана є степеневим рядом по степенях $z-0$. Тому функція $f_1(z)$ у формулі (4.10) вже є одним з членів шуканого ряду (відповідним до степеня $(z-0)^{-1}$). Знайдемо всі інші члени ряду Лорана. Подамо функції

$f_2(z)$ та $f_3(z)$ у вигляді

$$f_2(z) = \frac{-3}{z-1} = -\frac{3}{1-z} \overset{(4.2)}{=} 3\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \qquad |z|<1 \tag{4.11}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\left(1-\frac{z}{4}\right)} \overset{(4.2)}{=} \left| t = \frac{z}{4} \right| = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n, \qquad |z|<4. \tag{4.12}$$

Область збіжності ряду (4.11) визначається нерівністю $|z|<1$ – ряд збігається всередині круга радіуса $R=1$ з центром у точці $z=0.$

Область збіжності ряду (4.12) визначається нерівністю $|z|<4$ – ряд збігається всередині круга радіуса $R=4$ з центром у точці $z=0.$

Отже $\forall \ z\in D_1$ розкладення функції $f(z)$ в ряд Лорана має вигляд

$$f\ z\ = \frac{2}{z} + 3\sum_{n=1}^{\infty} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

2-й випадок. Нехай $z\in D_2$. Оскільки функція $f_1(z)$ у формулі (4.10) вже є одним з членів шуканого ряду, а для функції $f_3(z)$ в області D_2 справедливе розкладення (4.12), знайдемо розкладення функції $f_2(z)$

$$f_2(z) = \frac{-3}{z-1} = -\frac{3}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \overset{(4.2)}{=} \left| t = \frac{1}{z} \right| = \frac{3}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1\ . \tag{4.13}$$

Область збіжності ряду (4.13) визначається нерівністю $|z|>1$ – ряд збігається ззовні круга радіуса $R=1$ з центром у точці $z=0.$

Отже $\forall \ z\in D_2$ розкладення функції $f(z)$ в ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

3-й випадок. Нехай $z\in D_3$. Оскільки для функції $f_2(z)$ в області D_3 справедливе розкладення (4.13), знайдемо розкладення функції $f_3(z)$

$$f_3(z)=\frac{1}{z-4}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)}\overset{(4.2)}{=}\left|\ t=\frac{4}{z}\ \right|=-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n,\quad \left|\frac{4}{z}\right|<1. \quad (4.14)$$

Область збіжності ряду (4.14) визначається нерівністю $|z|>4$ – ряд збігається ззовні круга радіуса $R=4$ з центром у точці $z=0$.

Отже $\forall\ z\in D_3$ розкладення функції $f(z)$ в ряд Лорана має вигляд

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{3}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n.$$

Відповідь: $f(z)=\frac{2}{z}+3\sum_{n=1}^{\infty}z^n-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n,\qquad \forall\ z\in D_1;$

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{3}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n,\quad \forall\ z\in D_2;$$

$$f(z)=\frac{2}{z}+\frac{3}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n,\quad \forall\ z\in D_3.$$

Завдання 4.2. ФКЗ $f(z)=z\,e^{\frac{z}{3-z}}$ розкласти в ряд Лорана в околі точки $z_0=3$.

Розв'язання. Подамо ФКЗ у вигляді

$$f(z)=z\,e^{\frac{z}{3-z}}=(z-3+3)\,e^{-\frac{(z-3)+3}{z-3}}=$$

$$=(z-3)\,e^{-1-\frac{3}{z-3}}+3\,e^{-1-\frac{3}{z-3}}=e^{-1}\left[(z-3)\,e^{\frac{-3}{z-3}}+3\,e^{\frac{-3}{z-3}}\right] \quad (4.15)$$

Скористаємося розкладом (2.2), замінивши z на $\frac{-3}{z-3}$. Отримаємо

$$3\,e^{\frac{-3}{z-3}}=3\left(1-\frac{3}{1!(z-3)}+\frac{3^2}{2!(z-3)^2}-\ldots+\frac{(-1)^n3^n}{n!(z-3)^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{n+1}}{n!(z-3)^n},$$

$$(z-3)\,e^{\frac{-3}{z-3}}=(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!(z-3)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^n}{n!(z-3)^{n-1}}.$$

Підставивши отримані розклади в формулу (4.15), отримаємо

$$f(z)=\mathrm{e}^{-1}\left[(z-3)\,\mathrm{e}^{\frac{-3}{z-3}}+3\,\mathrm{e}^{\frac{-3}{z-3}}\right]=\mathrm{e}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!(z-3)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n+1}}{n!(z-3)^n}\right].$$

Це розкладення містить нескінченне число членів в головній частині ряду і справедливе в кільці $0<|z-3|<\infty$.

Відповідь: $f(z)=\mathrm{e}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n!(z-3)^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{n+1}}{n!(z-3)^n}\right],\quad 0<|z-3|<\infty.$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ЛИШКІВ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ ІНТЕГРАЛІВ

5.1. Застосування лишків при обчисленні інтегралів

Обчислення контурних інтегралів

Теорема 5.1. *(Основна теорема про лишки).* Якщо ФКЗ $f(z)$ є аналітичною в області D і на її контурі (L) за виключенням скінченої кількості внутрішніх точок $z_1, z_2, \dots, z_s$, то

$$\oint_{(L)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{5.1}$$

Обчислення інтегралів вигляду $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$.

Нехай $R(\cos x, \sin x)$ – раціональна функція аргументів $\cos x,\ \sin x$, яка є обмеженою на проміжку $[0, 2\pi]$. Покладемо

$$z=\mathrm{e}^{ix},\quad |z|=1,\qquad 0\le x\le 2\pi,\qquad dx=\frac{dz}{iz}, \tag{5.2}$$

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}=\frac{\mathrm{e}^{2ix}-1}{2i\,\mathrm{e}^{ix}}=\frac{z^2-1}{2iz}, \tag{5.3}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{2ix} + 1}{2e^{ix}} = \frac{z^2 + 1}{2z}. \tag{5.4}$$

Тоді
$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx =$$

$$= \int_{(L)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)\frac{dz}{zi} = \frac{1}{i}\int_{(L)} R^*(z)\, dz = 2\pi\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R^*(z),$$

де z_k – особливі точки функції $R^*(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)$, які знаходяться всередині кола $(L): \quad |z| = 1$. Отже,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = 2\pi\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R^*(z). \tag{5.5}$$

Обчислення інтегралів вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz$.

Якщо $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ – раціональна функція, де $P_m(z)$ та $Q_n(z)$ – многочлени порядку m та n, причому $n \ge m+2$ (степінь знаменника хоча б на дві одиниці більше степені чисельника) многочлен $Q_n(z)$ не має дійсних коренів, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{5.6}$$

де z_k– особливі точки функції $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, які належать верхній півплощині $(\operatorname{Im} z > 0)$.

Обчислення інтегралів вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\lambda z}\, dz \quad (\lambda > 0). \tag{5.7}$$

Якщо $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ – раціональна функція, причому степінь n многочлена $Q_n(z)$ хоча б на одиницю більше степені m многочлена $P_m(z)$ ($n \geq m+1$), многочлен $Q_n(z)$ не має дійсних коренів, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{i\lambda z}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\mathrm{e}^{i\lambda z}, \tag{5.8}$$

де z_k – особливі точки функції $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, які належать верхній півплощині $(\operatorname{Im} z>0)$.

Обчислення інтегралів вигляду

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\,dz, \qquad I_2=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz. \tag{5.9}$$

Якщо $f(z)$ правильний раціональний дріб то обчислення інтегралів (5.9), зводиться до обчислення інтегралів виду (5.7) за формулою (5.8), оскільки

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\,dz = \operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{i\lambda z}\,dz\right\}, \tag{5.10}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz = \operatorname{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{i\lambda z}\,dz\right\}. \tag{5.11}$$

5.2. Методика розв'язування завдання №5

Завдання 5.1. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{(L)} \dfrac{\operatorname{tg} z}{z\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2}\,dz$, де $(L):\quad |z|=2$.

Розв'язання. 1. Особливими точками функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2\cos z}$ є нулі знаменника $z=0$, $z=\dfrac{\pi}{4}$, $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Всередині кола $(L):\ |z|=2$ знаходяться тільки три точки $z_1=0$, $z_2=\dfrac{\pi}{4}$, $z_3=\dfrac{\pi}{2}$. Оскільки існує скінчена границя

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}\cdot\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2\cos z}=1\cdot\frac{16}{\pi^2}=\frac{16}{\pi^2},$$

то $z_1=0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$. Точки $z_2=\dfrac{\pi}{4}$ та $z_3=\dfrac{\pi}{2}$ – полюси відповідно другого та першого порядку функції $f(z)$.

2. Для обчислення інтеграла скористаємося основною теоремою про лишки, за формулою (5.1) матимемо

$$\oint\limits_{(L)}f(z)dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_1}f(z)+\operatorname*{Res}_{\substack{z=z_2\\ m=2}}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=z_3}f(z)\right).$$

Обчислимо окремо кожен лишок:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}f(z)=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2\cos z}\overset{(4.5)}{=}0;$$

$$\operatorname*{Res}_{\substack{z=z_2\\ m=2}}f(z)\overset{(4.8)}{=}\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2f(z)\right]'=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\operatorname{tg}z}{z}\right]'=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{z\cos^{-2}z-\operatorname{tg}z}{z^2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_3}f(z)\overset{(4.6)}{=}\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\operatorname{tg}z}{z\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=z-\dfrac{\pi}{2}, \quad z\to\dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t\to 0, \\ \operatorname{tg} z=\operatorname{tg}\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg} t=-\dfrac{1}{\operatorname{tg} t} \end{array}\right|=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t}\cdot\frac{1}{\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)^2}=-\frac{32}{\pi^3}.$$

$$\oint\limits_{(L)}\frac{\operatorname{tg} z}{z\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right)^2}\,dz=2\pi i\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi^2}-\frac{32}{\pi^3}\right)=4i\left(1-\frac{2}{\pi}-\frac{16}{\pi^2}\right).$$

Відповідь: $I=4i\left(1-\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{16}{\pi^2}\right)$.

Завдання 5.2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{(L)} z^2\cos\dfrac{1}{z-2}\,dz$, де $(L):\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

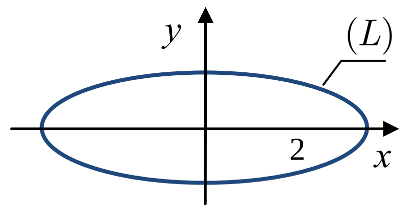

Рис. 5.1

1. Підінтегральна функція $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-2}$ має тільки одну особливу точку $z=2$, яка знаходиться всередині еліпса $(L):\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ (рис. 5.1). Точка $z=2$ є суттєво особливою для ФКЗ $f(z)$, бо функція є диференційованою в околі точки $z=2$ окрім самої цієї точки і

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to 2} z^2\cos\frac{1}{z-2}-(\nexists).$$

Головна частина розкладення $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z=2$ містить нескінченну кількість доданків (з від'ємними степенями $z-2$). Дійсно, $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-2}=(z-2+2)^2\cos\dfrac{1}{z-2}=$

$$=\left[(z-2)^2+4(z-2)+4\right]\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-2)^2}+\frac{1}{4!(z-2)^4}-\frac{1}{6!(z-2)^6}+\ldots\right)=$$

$$=(z-2)^2+4(z-2)+\left(4-\frac{1}{2!}\right)-\frac{4}{2!(z-2)}+\left(\frac{1}{4!}-\frac{4}{2!}\right)\frac{1}{(z-2)^2}+\ldots=$$

$$= (z-2)^2 + 4(z-2) + \frac{7}{2} - \underline{\underline{\frac{2}{(z-2)}}} - \frac{47}{24}\frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{6(z-2)^3} + \ldots$$

2. Для обчислення інтеграла скористаємося формулою (5.1)

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2} f(z).$$

За формулою (4.4) лишок у особливій точці $z = z_0$ можна знаходити за формулою $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$, де $c_{-1} = -2$ (коефіцієнт при степені $(z-2)^{-1}$ ряду Лорана для ФКЗ $f(z)$ в околі точки $z = z_0 = 2$), тому

$$\int\limits_{(L)} z^2 \cos\frac{1}{z-2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \left| \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = -2 \right| = -4i\pi.$$

Відповідь: $I = -4i\pi$.

Завдання 5.3. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{21}\sin t + 5)^2}$.

Розв'язання. 1. Перейдемо до нової змінної інтегрування згідно формул (5.2–5.4):

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{21}\sin t + 5)^2} = \left| \begin{array}{ll} z = \mathrm{e}^{it}, & dt = \dfrac{dz}{iz}, \\ \sin z = \dfrac{z^2-1}{2iz}, & (L): |\, z \,| = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{zi\left(\sqrt{21}\cdot\dfrac{(z^2-1)}{2iz} + 5\right)^2} = \frac{-4}{i} \int\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(\sqrt{21}z^2 + 10iz - \sqrt{21})^2}.$$

2. Знайдемо особливі точки функції: $f(z) = \dfrac{z}{(\sqrt{21}z^2 + 10iz - \sqrt{21})^2}$.

$$\sqrt{21}z^2 + 10iz - \sqrt{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+84}}{2\sqrt{21}} = \frac{-5i \pm 2i}{\sqrt{21}}.$$

Функція $\qquad f(z)=\dfrac{z}{21\left(z+\dfrac{3i}{\sqrt{21}}\right)^2\left(z+\dfrac{7i}{\sqrt{21}}\right)^2}=\dfrac{21z}{(\sqrt{21}z+3i)^2(\sqrt{21}z+7i)^2}$

є не аналітичною в двох точках (рис. 5.1):

$z_1=-\dfrac{3i}{\sqrt{21}}\approx-0.66i$ – полюс кратності $m=2$ функції $f(z)$ (знаходиться всередині контура (L)),

$z_2=-\dfrac{7i}{\sqrt{21}}\approx-1.53i$– полюс кратності $m=2$ функції $f(z)$ (знаходиться ззовні контура (L)).

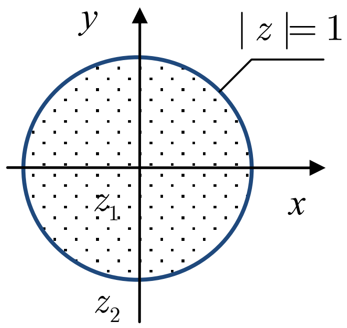

Рис. 5.1

3. Для обчислення отриманого інтеграла скористаємося формулою (5.5).

$$I=-\frac{84}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(\sqrt{21}z+3i)^2(\sqrt{21}z+7i)^2}=$$

$$=\frac{-84}{i}\cdot 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1}f(z)=\left|\operatorname*{Res}_{z=z_1}f(z)\overset{(4,8)}{=}\lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2f(z)\right]'\right|=$$

$$=-84\pi\lim_{z\to\frac{3i}{\sqrt{21}}}\left(\left(z+\frac{3i}{\sqrt{21}}\right)^2\cdot\frac{z}{(\sqrt{21}z+3i)^2(\sqrt{21}z+7i)^2}\right)'=$$

$$=-4\pi\lim_{z\to\frac{3i}{\sqrt{21}}}\left(\frac{z}{(\sqrt{21}z+7i)^2}\right)'=-8\pi\lim_{z\to\frac{3i}{\sqrt{21}}}\frac{(\sqrt{21}z+7i)^2-2\sqrt{21}z(\sqrt{21}z+7i)}{(\sqrt{21}z+7i)^4}=$$

$$=-8\pi\lim_{z\to\frac{3i}{\sqrt{21}}}\frac{(\sqrt{21}z+7i)-2\sqrt{21}z}{(\sqrt{21}z+7i)^3}=-8\pi\frac{(3i+7i)-6i}{(3i+7i)^3}=-8\pi\frac{4i}{(10i)^3}=0.032\pi\,.$$

Відповідь: $I=0.032\pi$.

Завдання 5.2. Обчислити інтеграл $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(x^2+5)dx}{x^4+20x^2+64}$.

Розв'язання. **1.** Оскільки підінтегральна функція

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^4+20x^2+64}=\frac{x^2+5}{(x^2+4)(x^2+16)}$$ – парна, то

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+5)dx}{x^4+20x^2+64}.$$

Аналітичним продовженням функції $f(x)$ буде

ФКЗ $\quad f(z) = \dfrac{z^2+5}{(z^2+4)(z^2+16)}$.

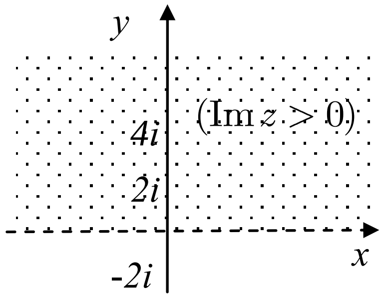

Рис. 5.2

2. Особливими точками функції $f(z)$ є полюси першого порядку $z_1 = 2i,\quad z_2 = -2i,\quad z_3 = 4i,\quad z_4 = -4i$. У верхній півплощині $(\operatorname{Im} z > 0)$ знаходяться точки $z_1 = 2i$ та $z_3 = 4i$, точки $z_2, z_4 \notin (\operatorname{Im} z > 0)$ (рис. 5.2).

3. Для обчислення отриманого інтеграла скористаємося формулою (5.6)

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(z^2+5)dz}{z^4+20z^2+64} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,(\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=4i} f(z)).$$

Обчислимо окремо кожен лишок. За формулою (4.6) матимемо

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \cancel{(z-2i)}\frac{z^2+5}{\cancel{(z-2i)}(z+2i)(z^2+16)} = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2+5}{(z+2i)(z^2+16)} = \frac{1}{48i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \lim_{z\to 4i} \cancel{(z-4i)}\frac{z^2+5}{(z^2+4)\cancel{(z-4i)}(z+4i)} = \lim_{z\to 4i}\frac{z^2+5}{(z^2+4)(z+4i)} = \frac{11}{96i}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(z^2+5)dz}{z^4+20z^2+64} = \pi i\,(\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=4i} f(z)) = \pi i\left(\frac{1}{48i}+\frac{11}{96i}\right) = \frac{13}{96}\pi.$$

Відповідь: $I = \dfrac{13}{96}\pi$.

Завдання 5.3. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 4x}{(x^2+25)^2}dx$.

Розв’язання. **1.** Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{(x+1)\sin 4x}{(x^2+25)^2}$ є уявної частиною ФКЗ $\quad F(z) = \dfrac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z^2+25)^2}$, тому згідно з формулою (5.11)

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 4x}{(x^2+25)^2}dx=\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z^2+25)^2}\,dz\right\}.$$

2. Особливими точками ФКЗ $F(z)=\dfrac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z^2+25)^2}=\dfrac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z+5i)^2(z-5i)^2}$ є полюси другого порядку $z_1=5i$, $z_2=-5i$. У верхній півплощині $(\mathrm{Im}\,z>0)$ знаходиться тільки полюс $z_1=5i$ кратності $m=2$ (рис.5.3).

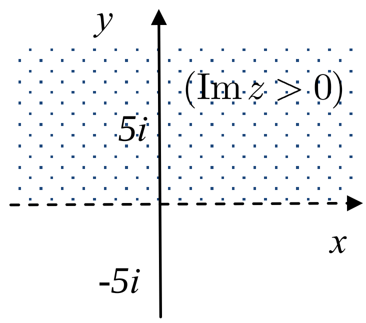

Рис. 5.3

3. Для обчислення інтеграла скористаємося формулою (5.8)

$$I=\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z^2+25)^2}\,dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{2\pi i\,\underset{\substack{z=5i\\ m=2}}{\mathrm{Res}}\,F(z)\right\}.$$

Для обчислення лишка скористаємося формулою (4.8):

$$\underset{\substack{z=5i\\ m=2}}{\mathrm{Res}}\,F(z)=\left|\,\underset{\substack{z=a\\ m=2}}{\mathrm{Res}}\,F(z)\overset{(4,8)}{=}\lim_{z\to a}\Big[(z-a)^2F(z)\Big]'\,\right|=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{\cancel{(z-5i)^2}\,(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z+5i)^2\,\cancel{(z-5i)^2}}\right]'=$$

$$=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z+5i)^2}\right]'=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{(\mathrm{e}^{4iz}+4i(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz})(z+5i)^2-2(z+5i)(z+1)\,\mathrm{e}^{4iz}}{(z+5i)^4}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{\mathrm{e}^{4iz}[(1+4iz+4i))(z+5i)-2(z+1)]}{(z+5i)^3}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 5i}\left[\frac{\mathrm{e}^{4iz}[4iz^2+(4i-21)z+5i-22]}{(z+5i)^3}\right]=\mathrm{e}^{-20}\,\frac{44+200i}{1000i}=\mathrm{e}^{-20}(0.2-0.044i).$$

$$I=\mathrm{Im}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,\mathrm{e}^{4iz}\,dz}{(z^2+25)^2}\right\}=\mathrm{Im}\;\;2\pi i\;\mathrm{e}^{-20}(0.2-0.044i)\;\;=0.4\pi\,\mathrm{e}^{-20}.$$

Відповідь: $I=0.4\pi\,\mathrm{e}^{-20}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров, Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник для вузов / Яков Степанович Бугров, Сергей Михайлович Никольский; [предисл. авторов]. – 3-е изд., испр. – М. : Наука; Главная редакция физико-матем. литературы, 1989. – 464 с. : ил. ; 21 см. – Предм. указ. : с. 461–464 . – 126000 экз. – ISBN 5–02–013925–4.
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимовмч Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова . – Изд. 5-е, исп. – М. : Высш. шк., 1996. – 416 с. : ил. ; 21 см. – Библиогр. : с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] : Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М. : Рольф, 2002. – 256 с. : ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.
4. Свешников, А. Г. Теория функций комплексного переменного [Текст] : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности „Физика”, „Прикладная математика” / Алексей Георгиевич Свешников, Андрей Николаевич Тихонов; под общ. ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова; [предисл. авторов]. – Изд. 4-е, стериот. – М. : Наука; Главная редакция физико-матем. литературы, 1979. – 320 с. ; 21 см. – Библиогр. : с. 314. – 22000 экз.

ЗМІСТ